计数

h10

2018 年 3 月 28 日

目录

容斥原理

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup Am| \\
&= \sum_{1 \le i \le m} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le m} |A_i \cap A_j| \\
&+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\
&+(-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

例1：已知某校有8位老师教数学（但他们可能还教别的学科），6位物理，5位化学；5位数理，4位数化，3位理化；3位同时教数理化，问该校共有几位理科老师？

例2：经典错排问题

容斥原理

$$
\begin{aligned}
f_n &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)! \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!(n-i)!}(n-i)! \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{n!}{i!} \\
&= (-1)^n + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{n!}{i!} \\
&= (-1)^n + n * f_{n-1}
\end{aligned}
$$

二项式反演

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_i \qquad b_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} a_i$$

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} b_i \qquad a_k = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} b_i$$

组合数形式

为什么容斥系数是 -1 的多少次方呢？

考虑一个有 n 个性质的元素，容斥时它贡献为

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}coef_i$$

当系数 $coef_i$ 等于 $(-1)^{i+1}$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}=[n\geq 1]$$

所以这个容斥系数可以求出至少有一个性质的元素的个数

组合数形式

如果题目求至少有 k 个性质的元素的个数呢

也就是说，系数要满足

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}coef_i=[n\geq k]$$

我们可以 $O(n^2)$ 暴力求出所有系数，不过对于大多数题目系数都有规律

所以容斥的本质其实就是构造出满足 $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}coef_i=a[n]$ 的系数 $coef$

组合数形式

例题：玲珑杯 Round 17 B

[题面传送门]

[题解传送门]

斯特林数形式

bzoj4671 异或图

定义两个结点数相同的图 G1 与图 G2 的异或为一个新的图 G，其中如果 (u,v) 在 G1 与 G2 中的出现次数之和为 1，那么边 (u,v) 在 G 中，否则这条边不在 G 中

现在给定 s 个结点数相同的图 $G1, G2, ..., Gs$，设 $S = G1, G2, ..., Gs$，请问 S 有多少个子集的异或为一个连通图

$2 \leq n \leq 10, 1 \leq s \leq 60$

斯特林数形式

容斥方法为用贝尔数的时间来枚举子集划分，不同子集之间一定没有边，同一个子集任意

明显容斥系数构造方案与组合数无关了，它应该满足

$$\sum_{i=1}^{n} S(n,i)coef_i = [n=1]$$

S 表示第二类斯特林数，$S(n,m)$ 的意义是把 n 个数划分到 m 个非空集合的方案数

在上式中 $coef_i$ 应取 $(-1)^i i!$

莫比乌斯函数形式

容斥系数构造方案为

$$\sum_{i|n} \frac{n}{i} coef_i$$

例：当 $coef_i = \mu(i)$ 时满足

$$\sum_{i|n} \frac{n}{i} \mu(i) = \phi(n)$$

广义容斥原理

设有与性质 $1, 2, ..., n$ 相关的元素 m 个，A_i 为满足第 i 种性质的所有元素的集合，定义 P_k 为至少有 k 种性质的元素的元次，则有：

$$P_k = \sum_{I \in C(n,k)} |\cap_{i \in I} A_i|$$

定义 Q_k 为正好有 k 种性质的元素的个数，则有：

$$Q_k = \sum_{I \in C(n,k)} |(\cap_{i \in I} A_i) \cap (\cap_{i \in \overline{I}} \overline{A_i})|$$

广义容斥原理

广义容斥原理的定义如下：

$$P_k = \sum_{I \in C(n,k)} |\cap_{i \in I} A_i|$$

$$Q_k = \sum_{I \in C(n,k)} |(\cap_{i \in I} A_i) \cap (\cap_{i \in \bar{I}} \overline{A_i})|$$

$$Q_k = \sum_{k \le i \le n} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P_i$$

例题：某校有12个教师，已知有8位老师教数学（但他们可能还教别的学科），6位物理，5位化学；5位数理，4位数化，3位理化；3位同时教数理化，问教其他课的有几位？只教一门的有几位？正好教两门的有几位？

例1：bzoj3622

~~一道被讲烂了的题~~

[题面传送门]

[题解传送门]

例2：bzoj4559

例2：bzoj4559 成绩比较

有 $n(n \leq 100)$ 位同学与 $m(m \leq 100)$ 门课程

每门课的满分为 $U_i(U_i \leq 10^9)$，每个同学的得分可能是 1 到 U_i 中的一个整数

如果在每门课上 A 获得的成绩均小于等于 B 获得的成绩，则称 A 被 B 碾压

现在得知，A 同学碾压了恰好 k 个同学（不包括自己）

还知道，对于第 i 门课程，有 R_i 位同学的分数超过了 A

求所有同学每门课程得分的方案数，对 10^9+7 取模

例2：bzoj4559

定义 P_k 表示 A 至少碾压 k 名同学的方案数

首先枚举是哪 k 个人被碾压，然后对每门课分别考虑，枚举分数超过 A 的 $R_i - 1$ 个人，最后枚举大家这门的成绩

$$
\begin{aligned}
P_k &= \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{U_i} \binom{n-k-1}{R_i-1} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1} \\
&= \binom{n-1}{k} \prod_{i=0}^{m} \binom{n-k-1}{R_i-1} \sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i} (U_i - j)^{R_i-1}
\end{aligned}
$$

拉格朗日插值计算 $\sum_{j=1}^{U_i} j^{n-R_i}(U_i - j)^{R_i-1}$

时间复杂度 $O(n^2 m + nm^2)$

树计数

树计数的套路一般是:

有根树：DP

无根树：prufer序

并没找到什么例题

无向连通图

给定 n，求 n 个点的有标号无向连通图个数

无向连通图

用全部方案减去不合法的，考虑 1 号点所在连通块大小

$$f_n = 2^{C(n,2)} - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} 2^{C(n-i,2)} f_i$$

可以FFT优化

欧拉回路图计数

给定 n，求 n 个点的有标号且存在欧拉回路的图的个数

欧拉回路图计数

存在欧拉回路图的充要条件是每个点度数都为偶数，而且图联通

所以使用有标号偶度数图的数量减去不连通的数量即可

设 n 个点的偶度数图的数量为 F_n，则 $F_n = 2^{C(n-1,2)}$

$$f_n = F_n - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} F_{n-i} f_i$$

连通生成子图计数

给你一个 n 个点，m 条边的连通图，问连通的生成子图的数量的奇偶性

$n, m \leq 10^5$

连通生成子图计数

在图的一个黑白染色下，我们定义双色边为两端颜色不同的边，如果图在只保留双色边的情况下仍然连通，那么则称这个染色为这个图的连通染色

定理：一个非连通图的连通染色数为 0，一个连通图的连通染色数模 4 一定余 2

证明比较麻烦，这里不讲了

我们不直接统计方案，而是先枚举一个一号点是黑色的染色，然后求这个染色是多少个生成子图的连通染色

那么对于一个连通图，重复计算的次数一定是奇数次，不影响答案

连通生成子图计数

枚举染色后我们发现，如果有一条边两边颜色一样，那么这条边可加可不加，也就是说，如果这个染色不是二分染色，那么它的贡献为 0

所以一个非二分图的连通生成子树个数一定是偶数个

同时一个二分图的连通生成子树个数一定是奇数个，证明依然很复杂...

~~就当一个结论记下来吧...~~

DAG计数

给定 n，求 n 个点的有标号DAG个数

DAG计数

枚举入度为 0 的点的个数

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k*(n-k)} f_{n-k}$$

但是这样枚举表示至少有 k 个度数为 0 的点，式子还需要容斥一下才是对的

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} 2^{k*(n-k)} f_{n-k}$$

把 $k*(n-k)$ 拆成 $\frac{n^2-k^2-(n-k)^2}{2}$，就可以FFT优化了

弱连通DAG计数

给定 n，求 n 个点的有标号弱连通DAG个数

弱连通DAG计数

设DAG数为 F_n，弱连通DAG数为 f_n

$$f_n = F_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f_k F_{n-k}$$

强连通图计数

给定 n，求 n 个点的有标号强连通图个数

强连通图计数

设 h_n 表示 n 个点的有向图数，并设答案为 f_n

考虑从所有图减去不合法的

不合法的图，所有强连通分量缩掉之后可以得到一个有至少两个点的DAG

我们枚举这个DAG里入度为 0 的点

强连通图计数

暂时设 $g_{n,k}$ 表示 n 个点组成 k 个强连通分量的方案数（不同强连通分量之间不能有边），得出下式

$$f_n = h_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k*(n-k)} h_{n-k} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} g_{k,i}$$

令 $G_k = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} g_{k,i}$，则有

$$G_n = f_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} f_k G_{n-k}$$

bzoj3812

求一个有向图的生成子图有多少个是强连通的

$n \leq 15$

与 n 个点的强连通图计数无太大差异，把下标该为集合即可

时间复杂度 $O(3^n)$

SRM613 DIV1 900pts

现在有个 $n * m$ 的棋盘，现在要往里面放 $2n$ 个棋子

每行有两个参数 $left_i$ 和 $right_i$

任何一行的前 $left_i$ 个格子和后 $right_i$ 个格子必须恰好有 1 个棋子且任何一列最多有 1 个棋子

求放置的总方案数

$n \leq 50, m \leq 200, left_i + right_i \leq m$

SRM613 DIV1 900pts

从第一列到最后一列依次考虑

如果当前遇到了一个 $left_i$，则可以从之前剩下的列数里随便选一列分配给当前的 i

如果当前遇到了一个 $right_i$，则相当于新加入了一行，之后的一列可以随意分配给当前可分配的行

设dp[i][j][k]代表当前到了第 i 列，剩余 j 个未分配的列，有 k 个 $right$ 未分配且当前可以分配

转移时枚举当前列放在哪个 $right$ 之内（或者不放），若有 $left$ 在当前列结束我们考虑用哪一个剩余的列分配给它即可

时间复杂度 $O(n^2m)$

SRM625 DIV1 900pts

有一张 n 个位置的圆桌，圆桌位置带标号，现在有m个不同的人按一定顺序到来并且坐下

我们将左右相邻的人为联通的，如果一个人与另一个人直接或者间接联通我们称他们在同一个联通块

要求每一个时刻最多不超过k个联通块，问有多少种不同安排位置的方案（同一个人坐的位置标号不同算不同方案）

$n, m, k \leq 2000$

SRM625 DIV1 900pts

先不考虑所有空位置，最后再把空位置加进来

可以设 $f_{i,j}$ 为现在有 i 个人安排好了，共有 j 个联通块

加入一个人考虑是在一个联通块左右，合并联通块，独立为一个联通块三种情况

$$f_{i,j} = 2j * f_{i-1,j} + (j+1) * f_{i-1,j+1} + (j-1) * f_{i-1,j-1}$$

最后统计 $n \times \sum f_{m,i} \binom{n-m-1}{i-1}$，即在联通块之间加入空位置并统计在圆桌上旋转的方案即可，避免重复第一个联通块之前和最后一个联通块之后不能同时又空位置

BBQ Hard

有 n 个数对 (A_i, B_i)，要求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\binom{A_i+B_i+A_j+B_j}{A_i+A_j}$$

输出答案对 10^9+7 取模。

$n \le 10^5; A_i, B_i \le 2000$

BBQ Hard

把每个点 (A_i, B_j) 看成平面上的两个点 $X_i = (-A_i, -B_i)$ 和 $Y_i = (A_i; B_i)$

假设有一个人，只能往上或者往右走

那么可以看出 $\binom{A_i+B_i+A_j+B_j}{A_i+A_j}$ 是从点 X_i 走到 Y_j 的方案数

不妨考虑一个dp，令dp[x][y]表示从 X 中的所有点走到 (x, y) 的方案数的和

时间复杂度 $O(n^2)$

bzoj4455

给你一个 n 个点的树与一个 n 个点的图，问有多少种方法可以把树镶嵌在图中

$n \leq 18$

bzoj4455

先枚举一个点集，dp[i][j]表示以 i 为根的子树且 i 对应图中的 j 的方案数，注意 j 一定要在枚举的点集中

显然会有大量节点映射到一个节点上，容斥一下就好

哈密顿路径

求 n 个点的图的哈密顿路径数量

$n \leq 18$

空间 32MB

哈密顿路径

考虑路径构成哈密顿路的充要条件：路径共有 $n-1$ 条边；经过了 n 个不同的点

容斥，枚举哪些点没有经过，然后DP统计出这种情况下，长度为 $n-1$ 的路径个数

Thank

Thank you for listening